

Тригонометријске функције

Тригонометријске функције су синус, косинус, тангенс и котангенс.

$$\text{синус—sin } x: \sin(\text{угао}) = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}}$$

$$\text{косинус—cos } x: \cos(\text{угао}) = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}}$$

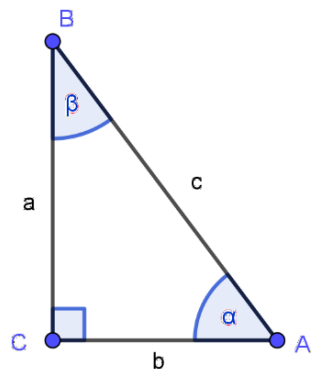
$$\text{тангенс—tg } x: \operatorname{tg}(\text{угао}) = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}}$$

$$\text{котангенс—ctg } x: \operatorname{ctg}(\text{угао}) = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}}$$

$$\text{секанс—sec } x: \sec(\text{угао}) = \frac{\text{хипотенуза}}{\text{налегла катета}}$$

$$\text{косеканс—cosec } x: \operatorname{cosec}(\text{угао}) = \frac{\text{хипотенуза}}{\text{наспрамна катета}}$$

Оштри углови у правоуглом троуглу



$$\sin \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}} = \frac{b}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}} = \frac{a}{b}$$

Основни тригонометријски идентитети

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

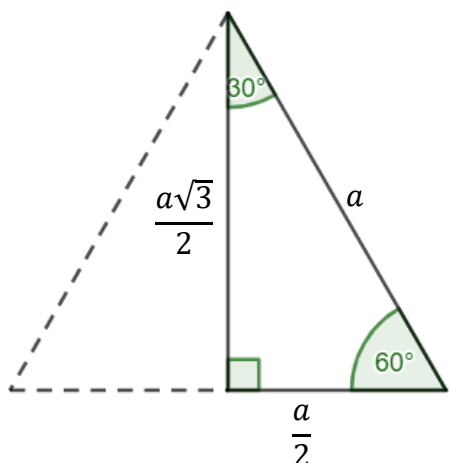
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Вредности тригонометријских функција за углове од 30° , 45° и 60°



$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

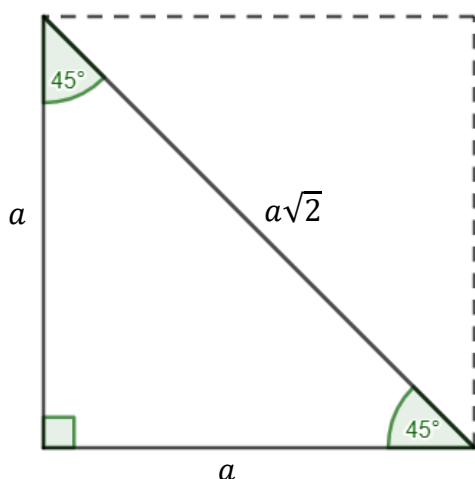
$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

За комплементне углове (углови који се допуњавају до 90°) $\alpha + \beta = 90^\circ$ важи:

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

Такође важи:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Мере угла

- Степени $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radijana}$
- Радијани $1 \text{ radijan} = \frac{180^\circ}{\pi}$

$$360^\circ = 2\pi \text{ radijana}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radijana}$$

Задаци за вежбање:

Наћи вредност осталих тригонометријских функција:

1. Ако је $\sin \alpha = \frac{9}{12}$

2. Ако је $\cos \alpha = \frac{5}{12}$

3. Ако је $\operatorname{ctg} \alpha = 7$

4. Ако је $\operatorname{tg} \alpha = 6$

Наћи вредност израза:

1.
$$\frac{\sin^2 60^\circ + \sin(-60^\circ) - 5 \cos(-30^\circ)}{3 \operatorname{tg}^2 45^\circ - 4}$$

2.
$$\frac{\sin^2 30^\circ - 4 \cos(-60^\circ) + \sin(-60^\circ)}{2 \operatorname{ctg}^2 45^\circ - 5}$$

Доказати следеће идентитете:

1.
$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

2.
$$\frac{1}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

3.
$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$$

4.
$$\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$$

5.
$$\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta$$

6.
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

7.
$$3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1$$

8.
$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$$

9.
$$\left(1 + \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \cdot \left(1 + \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}\right) = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

10.
$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}$$