КОМБИНАТОРИКА

Чиме се бави комбинаторика?

Комбинаторика се грубо говорећи бави размештањем елемената неког скупа који задовољавају одређене услове. Један од важних проблема којима се бави комбинаторика је и пребројавање. Питања којима ћемо се ми бавити су: Колико елемената у неком скупу има и како их пребројати?

Дакле, основно је питање колико елемената има дати скуп А? Тај број се зове кардинални број скупа А и обележава $|\mathrm{A}|$. С обзиром да је рач о коначним скуповима њихови кардинални бројеви су природни бројеви. Ако је скуп А велики и компликован при његовом пребројавању може врло лако доћи до грешке типа да се један или више елемената броји више пута или да се неки елемент прескочи.

Следећи принципи служе да се наведене грешке елиминишу.

Нека су A_1 , A_2, ... , A_n непразни скупови.

Принцип збира: Ако је за све $i \neq j$, $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, тада је:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

пример1: Колико решења има неједначина $x^2 + y^2 \leq 5$ у скупу целих бројева?

Принцип производа: Број елемената Декартовог производа је:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

пример2: Колико делитеља има број 600?

ПЕРМУТАЦИЈЕ, ВАРИЈАЦИЈЕ, КОМБИНАЦИЈЕ

Пермутација скупа А, која има *n* елемената, је сваки низ у коме се тачно по једанпут појављују сви елементи скупа А. Број пермутација *n*-точланог скупа је $P(n) = n!$.

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}$$

1. Колико има бројева који се могу формирати од цифара 1,3,5,7 тако да се у сваком четвороцифреном броју налази свака од тих цифара само једном.
2. На колико различитих начина могу да седну четри особе ако су постављене четри столице?
3. Пет особа треба поређати у врсту. На колико начина то можемо урадити?
4. На колико начина се могу поређати осам књига на једној полици?
5. На колико начина се могу распоредити седам писама у седам коверти?
6. На колико начина могу седам особа стати у врсту под условом да најстарија особа мора бити у средини?
7. На колико начина се могу поређати цифре 0,1,2,...,9 тако да се на првих пет места нађу парне цифре?
8. Колико различитих петоцифрених бројева се може написати помоћу цифара 0, 2, 4, 5, 7 ако се цифре не понављају?
9. Колико пермутација од елемената 1,2,3,4,5,6,7 почиње са
   а) 4; б) 234; в) 1234
10. Реши једначину:

$$\text{а)}\ \frac{x!}{(x-1)!} = 9 \qquad \text{б)}\ \frac{(x-2)!}{x!} = 72 \qquad \text{в)}\ \frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 132 \qquad \text{г)}\ \frac{(x+2)!}{(x-1)!} = 120$$

Реши неједначину:

а) $\frac{(2x+1)!}{(2x-1)!} \leq 72 \quad (x \in \mathrm{N})$ б) $\frac{(n+2)!}{3n!} \leq 4 \quad (n \in \mathrm{N})$

Нека је $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$,
$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ – низ дужине n
k_1 – број појављивања елемента a_1
k_2 – број појављивања елемента a_2
k_m – број појављивања елемента a_m
$\boldsymbol{\overline{P}(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}}$ – **пермутације са понављањем**

1. Образовати све пермутације од речи МАМА
2. Колико има седмоцифрених бројева чије су цифре 3,3,3,5,5,7,7.
3. Колико има седмоцифрених бројева образованих од цифара 0,0,0,0,1,2,3 не узимајући у обзир оне који почињу са нулом.
4. На колико начина се могу у првом реду шаховске табле распоредити два топа, два коња, два ловца, краљ и дама.
5. На колико начина се 45 књига може поделити на три полице тако да на свакој полици буде 15 књига.
6. На колико различитих начина се може распоредити пет дечака и пет девојчица у биоскопском реду од десет столица тако да два дечака никада не седе један поред другог.
7. На колико начина се на полици могу распоредити тридесет књига, тако да две одређене књиге буду једна до друге.

Варијација *k*-те класе скупа А, који има *n* елемената $(n \geq k)$, јесте сваки низ *k* међусобно различитих елемената.
Број варијација *k*-те класе скупа од *n* елемената $(n \geq k)$ једнак је:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

За $n = k$ варијације скупа А су пермутације тог скупа.
Ако треба да формирамо све подскупове неког датог скупа елемената где нам је редослед елемената **битан** користићемо варијације.

1. Колико има двоцифрених, а колико троцифрених бројева од цифара 1,2,...,9 чије су све цифре различите?
2. Колико има телефонских бројева са шест цифара код којих су све цифре различите?
3. На колико начина се могу разместити 4 ученика у учијоници која има 25 седишта?
4. Одељење једног разреда има 35 ученика који су међусобно разменили фотографије. Колико је укупно подељено фотографија?
5. У разреду има 32 ученика. На колико начина може 6 ученика седети у првој клупи?
6. На клупи су слободна четри места. На колико начина 15 особа може попунити ова места?

7. Један студент треба да полаже 4 испита за 8 дана. На колико начина то може учинити ако се зна да последњи испит полаже осмог дана?
8. Колико има различитих четвороцифрених бројева дељивих са 4 од цифара 1,2,3,4,5, ако ни један број не садржи исте цифре?
9. Број варијација друге класе од *n* елемената је 380. Наћи *n*? $V_n^2 = 380 = n(n-1)$
10. Од колико различитих елемената можемо формирати 210 варијација друге класе?
11. Реши једначине: а) $V_x^2 = 5x + 7$ б) $V_x^2 = 72$ в) $V_x^2 = 56x$ г) $7V_x^3 = 6V_{x+1}^3$

Варијација *k*-те класе скупа А, који има *n* елемената $(n \geq k)$ је сваки низ од *k* елемената скупа А, при чему се елементи могу понављати. Број варијација *k*-те класе скупа од *n* елемената $(n \geq k)$ једнак је:

$$\bar{V}_n^k = n^k$$

1. Колико има троцифрених бројева који се могу образовати од цифара 1,3,5,7,9.
2. Колико има Морзеових знакова од основних знакова · и – ако се зна да се један знак састоји од <u>највише</u> четири.
3. Колико има петоцихрених бројева који се могу написати од парних цифара 0,2,4,6,8, ако се сматра да број не може да почне нулом.
4. На колико начина може бити оцењен један ученик на крају школске године из 12 предмета ако:
а) из свих предмета може добити оцену од 1,...,5,
б) из два предмета не може добити оцену вишу од три, а из три нижу од четири.
5. Колико има рарличитих четвороцифрених бројева дељивих са 5 записаних помоћу цифара 0,1,2,3,4,5 ако:
а) ниједан број не садржи исте цифре,
б) цифре се могу понављати.
6. Колико се бројева може написати помоћу елемената скупа А који садрже просте чиниоце броја 3570 ако тражени бројеви садрже по три чиниоца.

Комбинација *k*-те класе скупа А, који има *n* елемената $(n \geq k)$ је сваки *k*- точлани подскуп скупа А. Број комбинација *k*-те класе скупа од *n* елемената $(n \geq k)$ једнак је:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Број $\binom{n}{k}$ се чита „ *n* над *k* “

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ако треба да формирамо подскупове где нам **није битан** редослед елемената, онда користимо комбинације.

1. На колико начина се од шест лица могу изабрати три?
2. У једној кутији се налази седам лоптица. На колико начина се може изабрати пет лоптица?
3. Да би добио позитивну оцену на писменом задатку ученик треба да уради два задатка од 6. На колико начина он може да изабере та два задатка?
4. Од 15 војника треба изабрати тројцу за стражу. На колико начина се може извршити избор?

5. Колико има комбинација у игри ЛОТО (од 39 бројева извлачи се 7)
6. Колико се различитих група по четри ученика може изабрати од 12 квалификованих ученика који ће репрезентовати школу на такмичењу?
7. На једном шаховском турниру учествује петнест шахиста. Сваки треба да одигра партију са сваким. Колико ће бити одиграно партија на турниру?
8. Од осам ученика треба саставити кошаркашки тим од пет чланова тако да се од два највиша ученика бира један центар, а од преосталих шест ученика, бирају се два бека, а затим још два крила. На колико начина це може саставити тим?
8*. Кошаркашки тим сачињавају 5 бекова, 4 центра и 3 крила. На колико начина се може од њих саставити петорка ако у њој морају да играју бар 2 бека и бар један центар.
9. На колико начина се 20 куглица може поделити на три групе тако да прва садржи 5, друга 7, а трећа 8 куглица?
10. Реши једначину:

а) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$ б) $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^{x}$ в) $3C_{x+2}^3 = 10C_x^2$

а) $\binom{x+1}{2} : \binom{x}{3} = 4:5$ б) $\binom{x+1}{3} : \binom{x}{4} = 6:5$

	ознака	**редослед**	**n -** број елемената датог скупа **k -** број елемената скупа који бирамо (класа)	**фпрмула** **- без понављања -**
ПЕРМУТАЦИЈЕ	P	Битан је редослед	$k = n$ Изабрани елементи су сви елементи полазног скупа	$P(n) = n!$
ВАРИЈАЦИЈЕ	V	Битан је редослед	$k < n$ Изабрани елементи нису сви елементи полазног скупа	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
КОМБИНАЦИЈЕ	C	Није битан редослед	$k < n$ Изабрани елементи нису сви елементи полазног скупа	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

	фпрмула **- са понављањем -**
ПЕРМУТАЦИЈЕ	$P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$
ВАРИЈАЦИЈЕ	$\bar{V}_n^k = n^k$

Кругова збирка: 438 – 442, 445 – 462, 470-480, 491-501.
Венова збирка: 1119, 1121, 1123, 1126 - 1131, 1135 - 1137, 1142, 1146 - 1149, 1153, 1154 - 1157, 1163 – 1166, 1191, 1202 – 1211, 1233, 1234, 1237, 1239, 1240, 1242.